МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до проведення практичних занять із навчальної дисципліни

«МЕТРОЛОГІЯ І СТАНДАРТИЗАЦІЯ»

(для студентів 3–4 курсів денної і заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2018

Методичні рекомендації до проведення практичних занять із дисципліни «Метрологія і стандартизація» (для студентів 3–4 курсів денної і заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. Є. С. Сєдишев. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. – 35 с.

Укладач Є. С. Сєдишев.

Рецензент канд. техн. наук О. М. Пустовойтова

Рекомендовано кафедрою будівельних конструкцій, протокол № 5 від 29.01.2018.

ЗМІСТ

ВСТУП

Курс «Метрологія і стандартизація» – один із завершальних серед дисциплін, присвячених технологіям, матеріалам і конструкціям у будівництві.

Головна мета курсу – дати уявлення майбутнім спеціалістам щодо місця наук «Метрологія» і «Стандартизація» у народному господарстві і будівництві, а також у міждержавному співробітництві.

Методичні вказівки мають на меті ознайомити студентів спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія з тематикою практичних занять за дисципліною «Метрологія і стандартизація», яка викладається на 3–4 курсах очної та заочної форм навчання.

На практичних заняттях для розглядання і вирішення студентам пропонуються задачі, що мають практичне значення і зустрічаються в технічних галузях, в тому числі і при статистичній обробці результатів випробування будівельних матеріалів і конструкцій.

Для практичних занять рекомендується використовувати різні літературні джерела: підручники, довідники, посібники, методичні вказівки, нормативну літературу. Для зручності студентам до кожного розділу методичних вказівок наводяться короткі відомості з теорії питання і формули для розрахунків, а в додатку наведені таблиці довідкових коефіцієнтів.

Цей методичний посібник складений відповідно до програми курсу «Метрологія і стандартизація» для підготовки бакалаврів спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія. Його зміст відповідає характеру викладання цієї дисципліни на кафедрі Будівельних конструкцій Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова із розрахунку 13–18 годинних практичних занять.

1 ОСНОВНІ МЕТОДИ ВИМІРЮВАННЯ

Вимірювання – це процес експериментального відшукування значень фізичної величини за допомогою спеціальних засобів вимірювання. Виміряти деяку фізичну величину Q – значить зрівняти її з іншою величиною q, прийнятої за одиницю виміру й виразити першу в частках останньої в математичній формі:

$$Q = k \cdot q, \tag{1.1}$$

де k – будь-яке позитивне ціле або дробове число, що показує в скільки разів Q більше або менше q.

Значення фізичної величини може бути отримане в результаті *прямих (безпосередніх) вимірів* (вимір маси на вагах, температури – термометром, довжини – за допомогою лінійних мір і т.д.), або *непрямих (посередніх),* за яких вона перебуває як функція безпосередньо обмірюваних величин (щільність за масою й геометричними розмірами, міцність бетону за часом проходження сигналу в неруйнівних методах вимірів, визначення крену споруд за результатами кутових і лінійних вимірів і т.п.).

Виміри розрізняють на *необхідні*, що дають тільки один результат вимірюваної величини, і *повторні (додаткові),* в результаті яких одержують кілька значень вимірюваної величини. Оцінка точності вимірів може бути зроблена тільки за наявності повторних вимірів. З метою контролю й оцінки точності необхідно робити, принаймні, два виміру однієї й тієї ж фізичної величини.

В технічних галузях й будівництві знаходять застосування наступні основні методи вимірів:

– *метод безпосередньої оцінки,* за яким значення величини визначають безпосередньо за відліковим пристроєм (тиск – манометром, характеристики струму – амперметром, вольтметром). Це, мабуть, найпоширеніший метод вимірів;

– *метод порівняння з мірою,* за якого вимірювану величину порівнюють із величиною, відтвореною мірою (порівняння маси на вагах з гирями, лінійні виміри рулеткою, де довжину одержують як набір лінійних величин);

– *метод збігів,* за якого різниця між вимірюваною величиною, і величиною, відтвореною мірою, вимірюють за збігом оцінок шкал; за цим методом вимірюють всі лінійні величини вимірювальними приладами з ноніусами (штангенциркулі, мікрометри) і кутовими приладами з верньєрами (теодоліти). Так наприклад, штангенциркуль (рис. 1.1) вимірює довжину за допомогою двох лінійок, ціни поділок яких знаходяться в певному відношенні.

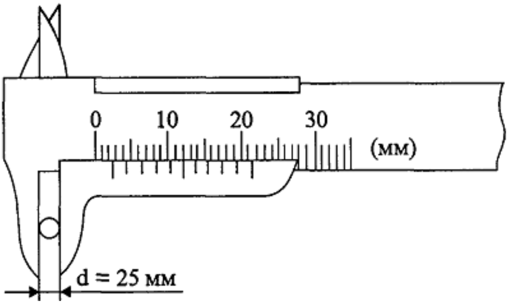


Рисунок 1.1 – До вимірювання діаметра дроту (2,5 мм) штангенциркулем за методом збігу (ноніуса)

2 ПОХИБКИ ВИМІРЮВАННЯ ТА ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ

Умовою будь-якого вимірювання є існування дійсного значення a вимірюваної величини. В зв'язку з тим, що зовнішні умови можуть змінюватися в процесі випробування, то багаторазові вимірювання однієї і тієї ж величини не виходять однаковими. Різницю між результатом вимірювань x і його істинним значенням a називають *абсолютною похибкою* вимірювання Δ, тобто

$$\Delta = x - a\,. \tag{2.1}$$

Відносна похибка вимірювань –

$$\frac{\Delta}{x} = \frac{x - a}{x}\,. \tag{2.2}$$

Абсолютні похибки вимірів, як правило, складаються із двох компонентів: *систематичної* та *випадкової*.

Систематичні похибки мають певний знак і накопичуються за певним функціональним законом в результаті односторонньо діючих факторів. Вони повинні виключатися з результатів вимірів шляхом введення *поправок*, які вираховуються за функціональним законом похибки, або компенсуватися відповідною організацією методики обробки вимірів.

Випадкові похибки, що виникають у результаті недосконалості техніки й методів вимірів, зміни зовнішніх умов, за рахунок округлення чисел результатів відліків з приладів і т.п., неминучі й повністю виключити їх з результатів вимірів неможливо.

Вплив похибок на результати випробувань істотно залежить від мети випробування. Якщо випробування проводять з метою виявлення характеру деформування і руйнування конструкції, то вплив похибок буде позначатися в меншій мірі, ніж при проведенні випробувань з метою одержання чисельних параметрів досліджуваних систем. В останньому випадку необхідна більш ретельна підготовка експерименту.

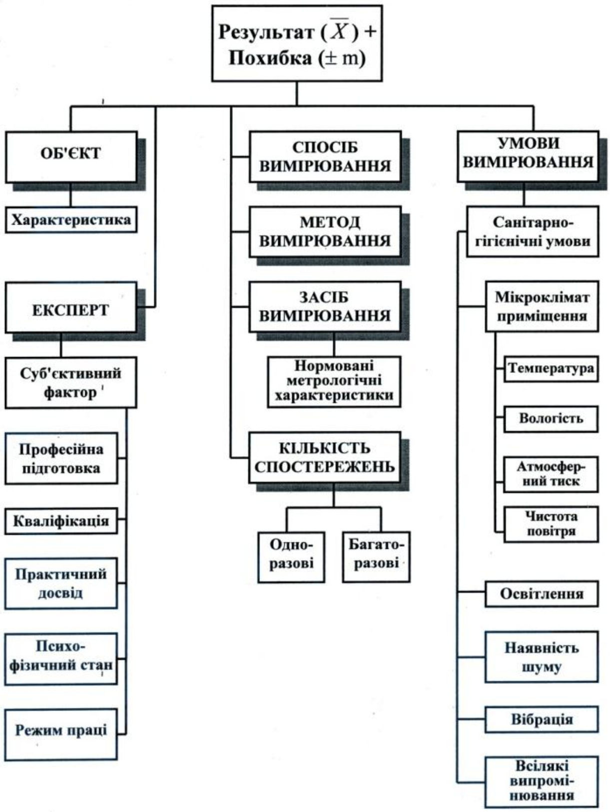


Рисунок 2.1 – Фактори, що впливають на результати вимірювання

Похибки випробувань зростають з ускладненням вимірювальної апаратури і методики випробувань. Варто пам’ятати також про самочинну зміну показань приладів, тобто про так званий «дрейф нуля». У прогиномірів це пов'язано з поступовим витягуванням дроту та ослабленням кріплення; у наклеєних тензорезисторів – із твердінням клею.

При обробці матеріалів випробувань будівельних матеріалів і конструкцій використовують статистичні імовірнісні методи, тому що міцнісні й пружні параметри матеріалів, варіації навантажень, похибки випробувань носять випадковий, стохастичний характер.

Для *підвищення точності вимірів*, при їх проведенні, варто дотримуватися наступних правил:

– якщо *систематична похибка* є визначальною, тобто її величина істотно більша *випадкової похибки* властивої даному методу, то досить виконати вимір лише двічі, тому що збільшення їх числа не підвищить точності результату вимірювання. Далі треба вирахувати і ввести до кінцевого результату *поправку*;

– якщо *систематичні похибки* менше *випадкових*, то, збільшуючи число вимірів, можна одержати результат, точність якого буде вище, ніж точність одного виміру. Маючи масив величин вимірів можна провести його математичну обробку.

3 СИСТЕМАТИЧНІ ПОХИБКИ ВИМІРЮВАННЯ ТА МЕТОДИ ЇХ УСУНЕННЯ

3.1 Загальна характеристика систематичних похибок

Систематичні похибки класифікуються за характером зміни та причинам виникнення.

В залежності від *характеру зміни* систематичні похибки вимірювання поділяються (рис. 3.1) на постійні та перемінні (прогресивні, періодичні та похибки, що змінюються за складним законом).

В залежності від *причин виникнення* систематичні похибки вимірювання бувають: інструментальними (апаратурними, похибки приладів), похибками методу вимірювання, похибками залежними від зміни умов вимірювання, суб’єктивними.

Систематичні похибки викривляють результат вимірювання, тому їх необхідно виключати з результату вимірювання шляхом введення поправок або регулюванням приладів з доведенням систематичної похибки до мінімуму.

Результати спостережень, які отримані при наявності похибок, називаються невиправленими.

Врахування впливу систематичних похибок можна виконати шляхом:

– усуненням джерел похибок до початку вимірювання (по паспортним даним засобу вимірювання, за результатами повірки засобу вимірювання, застосуванням методів вимірювання з мінімальними похибками);

– визначенням поправок і внесенням їх до результату вимірювання;

– оцінкою меж не виключених систематичних похибок.

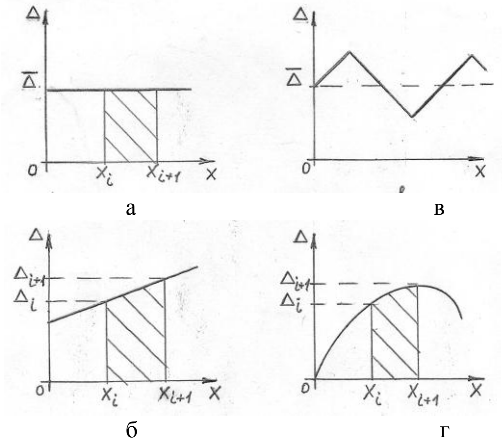


Рисунок 3.1 – Зміни систематичних похибок від виміру до виміру:
а – постійні похибки; б – перемінні прогресивні; в – перемінні періодичні;
г – похибки, що змінюються за складним законом

Для підвищення точності вимірів з виключенням постійних систематичних похибок застосовують наступні методи: вимірювання з заміщенням, протиставленням, компенсацією похибки за знаком, рандомізацією та ін.

3.2 Метод вимірювання з заміщенням

Метод вимірювання з заміщенням це різновид загального методу порівняння з мірою. Порівняння виконується заміщенням вимірюваної величини мірою з відомим значенням величини так, щоб в стані засобів вимірювання, які використовуються, не проходили ніякі зміни.

Приклад 3.1 *Зважування на пружинних вагах, у яких є постійні систематичні похибки.*

Зважування виконується у два прийоми (див. рис. 3.2). Спочатку на ваги кладеться маса m_x і відмічають положення указника (на відмітці N). Потім зважене тіло заміщають гирями такої ж маси m_0, щоб указник знов зайняв положення на відмітці N. Тоді $m_x = m_0$ і систематична похибка ваг не відобразиться на результаті важення.

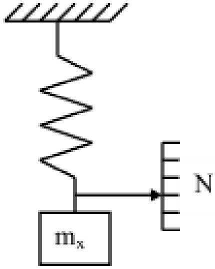


Рисунок 3.2 – Ілюстрація методу вимірювання з заміщенням (метод Борда)

3.3 Метод доповнення

При застосуванні метод доповнення значення величини, що вимірюється, доповнюється мірою цієї ж величини з розрахунком, щоб на прилад порівняння діяла їх сума, яка рівняється попередньо заданому значенню.

Приклад 3.2 *Зважування на пружинних вагах, у яких є постійні систематичні похибки (рис. 3.2).*

Якщо m_x (масу, що вимірюється) доповнити масою міри m_0 так, щоби їх сума дорівнювала положенню на відмітці шкали N, то тоді $m_x = N - m_0$.

Похибка вимірювання зменшується тому що масу m_x вираховуємо з двох заданих величин.

3.4 Метод протиставлення *(різновид методу порівняння з мірою)*

Вимірювання виконується за два рази і виконується так, щоб в обох випадках причина постійної похибки оказувала на результат спостережень різні, але відомі по закономірності дії.

Приклад 3.3*. Зважування на нерівноплічних вагах (рис. 3.3).*

Умова рівноваги ваг: $m_x \cdot l_1 = m_0 \cdot l_2$,

де m_x – маса зваженого вантажу; m_0 – маса гирі; l_1, l_2 – довжина пліч ваг.

Перепишемо формулу у вигляді $m_x = m_0 \dfrac{l_2}{l_1}$.

Якщо плечі однакові, то $m_x = m_0$.

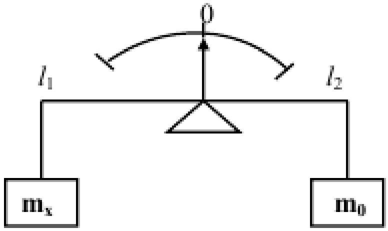


Рисунок 3.3 – Ілюстрація методу вимірювання протиставленням

Якщо $l_1 \neq l_2$, то при виваженні кожен раз виникає систематична похибка $\Delta_c = m_0\left(\frac{l_2}{l_1} - 1\right)$. Для виключення цієї похибки важення виконується в два етапи. Спочатку вантаж m_x, врівноважується гирями m_{01}. Тоді $m_x \cdot l_1 = m_{01} \cdot l_2$. Потім вантаж m_x переміщують на ту чашку ваг де були гирі і заново врівноважують гирями m_{02} і $m_{02} \cdot l_1 = m_x \cdot l_2$. Виключив з рівняння $\frac{l_2}{l_1}$ отримаємо $m_x = \sqrt{m_{01} \cdot m_{02}}$.

3.5 Диференційний метод

Диференційний метод характеризується вимірюванням різності між вимірюваною величиною і відомою величиною, яка відтворюється мірою. Метод позволяє отримати результат відносно високої точності при використанні відносно грубих засобів вимірювання.

Приклад 3.4 *Вимірювання довжини зразка* X*, якщо відома довжина міри* $l < X$ *, тобто* $X = l + a$*, де* a *– вимірювальна величина.*

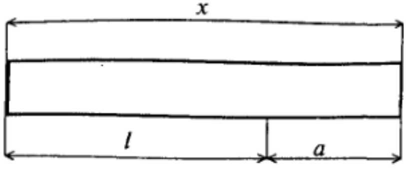


Рисунок 3.4 – Диференційний метод вимірювання довжини (до прикладу 3.4)

Дійсне значення a_∂ буде відрізнятися від виміряного a на величину похибки Δ, тобто $a_\partial = a \pm \Delta = a \cdot \left(1 \pm \frac{\Delta}{a}\right)$, тоді

$$X = l + a \pm \Delta = (l + a) \cdot \left[1 \pm \frac{\Delta}{l + a}\right].$$

Якщо $l \gg a$, то $\frac{\Delta}{l + a} \ll \frac{\Delta}{a}$.

Наприклад, $l = 100$ мм; $a = 10$ мм і похибка вимірювання $\Delta = 1$ мм. Тоді відносна похибка

$$\frac{1}{100 + 10} \approx 0{,}009 \; (0{,}9\ \%) \ll \frac{1}{10} = 0{,}1 \; (10\ \%).$$

Таким чином відносна похибка вимірювання, якщо її рознести по всій довжині значно зменшується.

3.6 Нульовий метод

Нульовий метод аналогічне диференційному, але різниця між вимірювальною величиною і мірою приводиться до «0». Це повинно контролюватися приладом (нуль-індикатором).

Метод має переваги в тому, що міра може бути в багато разів менше величини, що вимірюється.

Приклад 3.3 *Нерівноплічні ваги (рис. 3.3).*

Рівняння рівноваги при стрілці на нулю $m_x \cdot l_1 = m_0 \cdot l_2$.

Тоді, наприклад, вимірювальну величину можна вирахувати як $m_x = m_0 \frac{l_2}{l_1}$.

Приклад 3.4 *Електричний міст спротиву (міст Уітстона).*

Коли сила току в діагоналі моста (див. рис. 3.5) прирівняна нулю, то $R_1 \cdot R_3 = R_2 \cdot R_4$ (міст збалансовано).

Якщо електричний спротив якогось плеча невідомий, то при збалансуванні мосту його можна вирахувати $X = R_4 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}$.

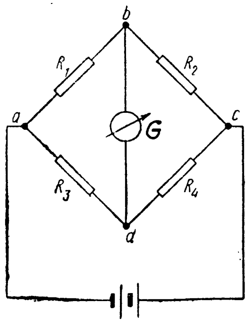


Рисунок 3.5 – Вимірювальний міст Уітстона
(R_1, R_2, R_3, R_4 – опори-резистори, включені в плечі моста)

3.7 Метод рандомізації

Суть методу рандомізації в тому, що одна і таж величина вимірюється різними випадковими методами (приладами). Систематичні похибки кожного з них для всієї сукупності є різні випадкові величини. Тому при збільшенні числа методів (приладів), що використовуються, систематичні похибки взаємно компенсуються.

3.8 Метод компенсації похибки за знаком

Метод передбачає вимір з двома спостереженнями, які виконуються так, щоб постійна систематична похибка входила до результату кожного з них з різними знаками. Виключається вона при обрахуванні середнього значення.

Наприклад, для компенсації похибки, що обумовлена магнітним полем Землі при геофізичних вимірах, перший вимір проводять при любому положенні приладу, а для другого виміру прилад повертають в горизонтальній площині на 180 °. Якщо в першому випадку магнітне поле додавалось до поля приладу і визивало позитивну похибку, то при повороті приладу магнітне поле Землі впливає на показання приладу з негативною похибкою, що рівна попередній.

З компенсацією похибки за знаком виконується повірка за «нуль-пунктом» перед роботою геодезичних нівелірів і теодолітів.

3.9 Методи усунення перемінних похибок

*Аналіз знаків невиправлених похиб*ок. Якщо знаки невиправлених похибок чергуються з якою не будь закономірністю, то спостерігається перемінна систематична похибка. Якщо послідовність знаків «+» у похибок змінюється послідовністю знаків «–», або навпаки, то присутня монотонно змінна систематична похибка. Якщо групи знаків «+» і «–» у похибок чергуються, то присутня періодична систематична похибка.

Графічний метод. Один з найбільш простих способів виявити перемінної систематичної похибки в результатах спостереження. Він полягає в графічному представленні послідовності невиправлених значень результатів спостережень. На графіку через побудовані точки проводять плавну криву, яка виражає тенденцію в зміні результату виміру, якщо вона існує. Якщо тенденція не спостерігається, то перемінну систематичну похибку можна визнати практично відсутньою.

Наприклад, окремим випадком похибки, яка змінюється з якоюсь закономірністю, є похибка прогресивна за лінійним законом, наприклад, пропорційно часу (за типом рис. 3.1 б). В цьому випадку похибку можна оцінити і виключити наступним чином. Якщо відомо, що при вимірюванні постійної величини X_0 систематична похибка змінюється лінійно у часі, тобто $X_{зм} = X_0 + C \cdot t$ (де *C=const*), то для її виключення достатньо зробити два спостереження X_1 та X_2 з фіксацією часу t_1 та t_2. Тоді шукане значення величини буде

$$X_0 = \frac{X_1 \cdot t_2 - X_2 \cdot t_1}{t_2 - t_1}.$$

4 ПОХИБКИ І КЛАСИ ТОЧНОСТІ ЗАСОБІВ ВИМІРЮВАННЯ

4.1 Види похибок засобів вимірювання в залежності від характеру зміни фізичної величини

Статична похибка засобу вимірювання – похибка, яка виникає при вимірі величини що приймається за незмінну (вимір довжини, діаметру стержня, тощо).

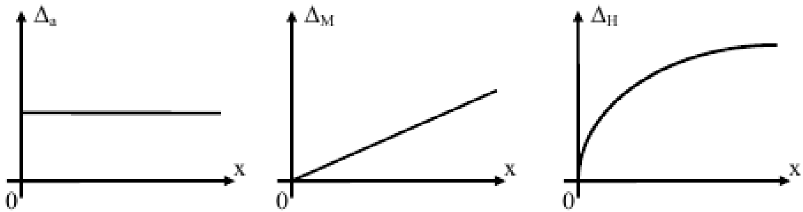
Динамічна похибка засобу вимірювання – похибка, яка виникає при вимірі змінною (в процесі виміру) величини, наприклад, вимір температури в печі за допомогою термопари.

Розрізняють такі поняття як *основна* і *додаткова* похибки засобів виміру. *Основна* похибка проявляється при нормальних (паспортних) умовах експлуатації засобу виміру. *Додаткова* похибка виникає, якщо прилад працює в умовах відмінних від нормальних.

До *основних похибок* засобів виміру входять:

Адитивні (отримані шляхом складання) – адитивні похибки ще називаються похибками «нуля», тобто прилад показує постійні похибки при всіх значеннях величини, яка вимірюється. Якщо адитивна похибка є систематичною, то вона усувається шляхом коректування нульового значення вихідного сигналу. Виникання випадкової адитивної похибки обумовлено внутрішніми недоліками засобу виміру (тертя, дрейф «нуля», коливання сигналу).

Мультиплікативні (отримані шляхом помноження) – мультиплікативні похибки ще називаються похибками чутливості засобів виміру. Мультиплікативна похибка лінійно змінюється із зміною величини, що виміряється. Причинами її виникнення є зміни коефіцієнта перетворення окремих елементів і вузлів систем виміру.



а б в

Рисунок 4.1 – Графіки зміни похибок: а – адитивної; б – мультипликативної; в – нелинійної

Похибки гістерезису (або оборотного ходу) - це похибка, яка важко усувається. Вона може виникати від люфту, тертя на контактах і в пружинах, пружних ефектів). Похибка гістерезису оцінюється *варіацією показань* вимірювального приладу (різницею між показаннями приладу на прямому і оборотному ходах):

$$w = x_{nx} - x_{ox}\,.$$

4.2 Класи точності засобів виміру

Клас точності – це характеристика засобу виміру, яка виражена межею допустимих значень його основної і додаткової похибок, а також іншими характеристиками, які впливають на точність. Тобто клас точності позволяє судити о том в яких межах знаходиться похибка засобу виміру даного типу.

Способи завдання класів точності приладів (табл. 4.1):

– 1-й спосіб (використовується для мір). Вказується порядковий номер класу точності (1-й, 2-й і т. п.) Наприклад, динамометр зразковий 3-го класу точності. Порядок вирахування похибок визначають за документацією (паспортом), яка додається до міри;

– 2-й спосіб задає клас точності для приладів з рівномірною шкалою (рис. 4.2) і адитивними похибками. Клас задається у вигляді числа R, яке виражене в % від діапазону шкали. Основна похибка приладу не повинна перевищувати число R = (**1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 4,0; 5,0; 6,0**);

– 3-й спосіб задає клас точності для приладів з нерівномірною шкалою (рис. 4.3) і адитивними похибками. При цьому нормується основна відносна похибка в % від величини показання. Число, що характеризує клас точності задається у кружечку Ⓡ;

– 4-й спосіб використовують для приладів з порівняними адитивними й мультиплікативними похибками. Точність задається двома числами c/d, де число c відповідає за адитивну, а d за мультиплікативну складові;

– 5-й спосіб (для приладів з нерівномірною шкалою). Клас точності задають числом R над знаком $\vee$, що нормує основну приведену похибку в % від довжини основного діапазону шкали.

Таблиця 4.1 – Класи точності засобів вимірювальної техніки

Формула для границь допустимих похибок	Приклади границь допустимої основної похибки	Позначення класу точності		Примітка
		в документації	на засобах вимірювань	
$\Delta = \pm a$	-	Клас точності М	М	-
$\Delta = \pm(a + bx)$	-	Клас точності С	С	-
$\gamma = \dfrac{\Delta}{X_N} = \pm p$	$\gamma = \pm 1{,}5$	Клас точності 1,5	1,5	Якщо X_N виражається в одиницях вимірюваної величини
	$\gamma = \pm 1{,}5$	Клас точності 1,5	$\underset{\vee}{1{,}5}$	Якщо X_N визначається довжиною шкали
$\delta = \dfrac{\Delta}{x} = \pm q$	$\delta = \pm 0{,}5$	Клас точності 0,5	0,5	-
$\delta = \pm\left[c + d\left(\left\|\dfrac{X_K}{x}\right\| - 1\right)\right]$	$\delta = \pm\left[0{,}02 + 0{,}01\left(\left\|\dfrac{X_K}{x}\right\| - 1\right)\right]$	Клас точності 0,02/0,01	0,02/0,01	-

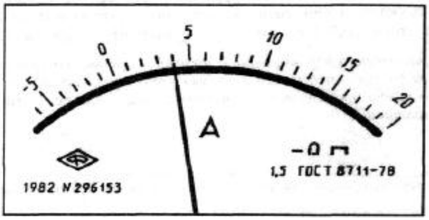


Рисунок 4.2 – Лицьова панель амперметру класу точності **1,5** з рівномірною шкалою

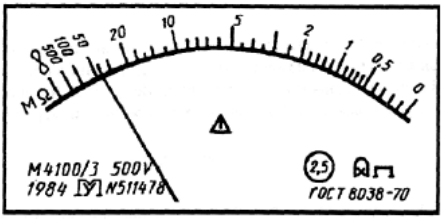


Рисунок 4.3 – Лицьова панель мегаомметру класу точності **2,5** з нерівномірною шкалою

Приклад 4.1

Амперметр класу точності **1,0** з межами виміру –10 А…+25 А показує 5 А. Визначити межу допустимої абсолютної похибки.

Рішення:

Клас точності амперметру задано межею допустимої приведеною відносною похибкою $\delta = \pm \frac{\Delta}{X_N} \cdot 100\% = 1\%$.

Нормуюче значення по діапазону вимірів

$X_N = |-10| + |+25| = 35$ А.

Межа допустимої абсолютної похибки

$$\Delta = \pm \frac{\delta \cdot X_N}{100\%} = \pm \frac{1{,}0 \cdot 35}{100} = \pm 0{,}35 \text{ А.}$$

Приклад 4.2

Лічильник електричної енергії класу точності (0,5) показує витрати в 500 кВт·год. Визначити межу допустимої абсолютної похибки лічильника.

Рішення:

Відносна похибка лічильника

$$\delta = \pm \frac{\Delta}{X} \cdot 100\% \le \pm 0{,}5\% \,.$$

Межа допустимої абсолютної похибки

$$\Delta = \pm \frac{\delta \cdot X}{100\%} = \pm \frac{0{,}5 \cdot 500}{100} = \pm 2{,}5 \text{ кВт·год.}$$

Приклад 4.3

Амперметр класу точності **0,2/0,1** з рівномірною шкалою і діапазоном 0…50 А показує 10 А. Визначити межу допустимої абсолютної похибки.

Рішення:

Межа допустимої відносної похибки

$$\delta = \pm \left[c + d \cdot \left(\left| \frac{X_N}{X} \right| - 1 \right) \right] \% = \pm \left[0{,}2 + 0{,}1 \cdot \left(\left| \frac{50}{10} \right| - 1 \right) \right] = \pm 0{,}6\% \,.$$

Межа допустимої абсолютної похибки

$$\Delta = \pm \frac{\delta \cdot X}{100\%} = \pm \frac{0{,}6 \cdot 10}{100} = \pm 0{,}06 \text{ А.}$$

Приклад 4.4

Амперметр з діапазоном шкали 0…50 А показує відлік 25 А. Ігноруючи інші види похибок вимірювання, оцінити межі допустимої абсолютної похибки цього відліку при використанні різних приладів з класами точності: **0,5/0,2**; 0,5 та **0,5**.

Визначимо межу допустимої абсолютної похибки:

– для приладу класу точності **0,5/0,2** маємо:

$$\delta = \pm \left[c + d \cdot \left(\left| \frac{X_N}{X} \right| - 1 \right) \right] \% = \pm \left[0{,}5 + 0{,}2 \cdot \left(\left| \frac{50}{25} \right| - 1 \right) \right] = \pm 0{,}7 \text{ \%,}$$

$$\Delta = \pm \frac{\delta \cdot X}{100\%} = \pm \frac{0{,}7 \cdot 25}{100} = \pm 0{,}175 \text{ А;}$$

– для приладу з класом точності 0,5:

$$\Delta = \pm \frac{\delta \cdot X}{100\%} = \pm \frac{0{,}5 \cdot 25}{100} = \pm 0{,}125 \text{ А;}$$

– для приладу з класом точності **0,5**:

$$\Delta = \pm \frac{\delta \cdot X_N}{100\%} = \pm \frac{0{,}5 \cdot 50}{100} = \pm 0{,}25 \text{ А.}$$

5 ВИПАДКОВІ ПОХИБКИ ВИМІРЮВАННЯ

5.1 Загальна характеристика випадкових похибок і точкові оцінки істинного значення величин, що вимірюються

Випадкові похибки (у тому числі грубі похибки й промахи) змінюються випадково при повторних вимірах однієї і тієї ж величини. Випадкова похибка не може бути виключена з результатів вимірювання, однак її вплив може бути зменшений за рахунок повторних вимірювань однієї і тієї ж величини й математичної обробки експериментальних даних.

Грубі похибки і промахи з’являються через помилки або неправильні дії виконавця, а також при короткочасних різних змінах (температури, вібрація, поштовх приладу) при проведенні вимірювання.

Результат величини, що виміряється, завжди містить в собі систематичну й випадкову похибки, тому похибки результатів виміру взагалі можна розглядати як випадкову величину. Тоді систематична похибка – це математичне очікування цієї величини, а випадкова похибка – центрована випадкова величина.

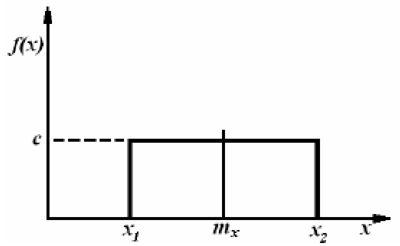
Повним описом величини, а отже, й похибки служить її закон розподілу, яким визначається характер поведінки різних результатів окремих вимірів.

Якщо неперервна випадкова величина x рівномірно розподілена в інтервалі з межами x_1 і x_2 (рис. 5.1, а), то густина розподілу в цьому інтервалі постійна, а за його межами рівна нулю

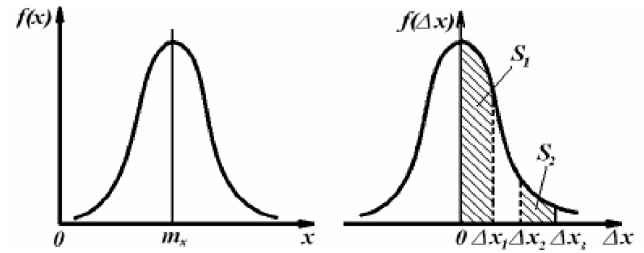
$$c = \frac{1}{x_1 - x_2}. \tag{5.1}$$

Статистична обробка результатів випробувань будівельних матеріалів і конструкцій показує, що більшість аналізованих випадкових величин змінюються за нормальним законом розподілу Гауса (рис. 5.1, б) з щільністю розподілу за формулою

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x_i - \bar{x})^2}{2\sigma^2}}. \tag{5.2}$$



а



б

Рисунок 5.1 – Графіки розподілу випадкової величини *X* (функції щільності ймовірності):
а – рівномірний розподіл; б – нормальний розподіл (за законом Гауса)

Закон розподілу можна охарактеризувати числовими характеристиками, які використовуються для кількісної оцінки похибки. Основними числовими характеристиками законів розподілу – є математичне очікування і дисперсія або середньоквадратичне відхилення σ_x, що частіше використається замість дисперсії.

Точковими оцінками цих параметрів називають оцінки, що виражені одним числом. Точкова оцінка математичного очікування результатів вимірів $M[X]$ – є середнє арифметичне значення величини, що виміряється

$$\bar{x} = \sum_{1}^{n} x_i / n, \qquad (5.3)$$

де n – число одиничних вимірів (вибірка);

x_i – результат *i*-го одиничного виміру.

Точковою оцінкою дисперсії $D[X]$ – є статистична дисперсія, що характеризує розкид (розсіювання) значень одиничних вимірів відносно середнього арифметичного значення

$$S_x = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}. \qquad (5.4)$$

Точкову оцінку – середньо квадратичне відхилення можна визначити за формулою

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}}. \qquad (5.5)$$

Точкові оцінки можна розглядати, як випадкові величини, значення яких залежать від об'єму вибірки n. Чим більше вибірка і точніше визначена функція розподілу значень фізичної величини, що виміряється, тим точніше за допомогою середньо арифметичного значення оцінюється істинне (дійсне) значення фізичної величини, а з допомогою середньо квадратичного відхилення – розкид результатів вимірів.

Для попередньої оцінки закону розподілу параметра можна використовувати коефіцієнт варіації

$$v_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}}. \qquad (5.6)$$

При $v_x \le 0{,}33\ldots0{,}35$ можна вважати, що розподіл випадкової величини підкорюється нормальному закону.

5.2 Інтервальні оцінки результатів вимірювання

В задачах, де потрібно оцінити достовірність результатів вимірювання, знання точкових оцінок недостатнє.

Коли розподіл похибки теоретично безграничний (при нормальному законі розподілу), то в цьому випадку можна говорити лише об інтервалі, за межи якого похибка не вийде с деякою ймовірністю. Цей інтервал називають довірчим інтервалом, характеризуючи його ймовірність – довірчою ймовірністю, а межи цього інтервалу – значеннями похибки. Довірчий інтервал й довірча ймовірність вибираються в залежності від конкретних умов вимірювання.

Довірчий інтервал з межами у вигляді абсолютного значення похибки Δ можна записати так

$$\bar{x} - \Delta < x < \bar{x} + \Delta. \qquad (5.7)$$

В теорії ймовірності доказано, що в межах $\bar{x} \pm \sigma_x$ знаходяться 68,3 % всіх вимірюваних значень величин, в межах $\bar{x} \pm 2\sigma_x$ знаходяться до 95,4 %, а в межах $\bar{x} \pm 3\sigma_x$ – 99,7 %. Тому й в статистичній обробці результатів часто використовують стандартні довірчі ймовірності *P* = 0,68; 0,95; 0,99; 0,999. Для випробувань будівельних матеріалів і конструкцій найчастіше *P* = 0,95. Для характеристик ґрунтів при інженерно-геологічних випробуваннях беруть *P* = 0,85 і 0,95.

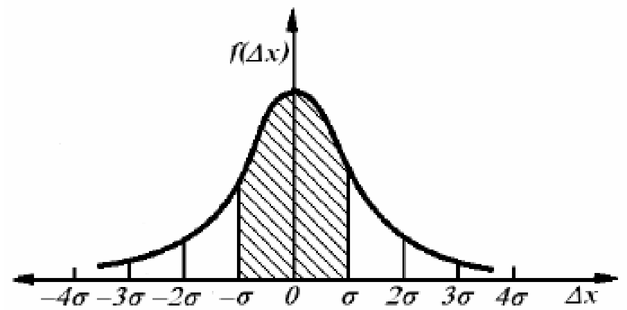


Рисунок 5.2 – До поняття довірчий інтервал

Однак, щоб середнє квадратичне відхилення наближалося до стандарту, необхідно виконати багато вимірювань, що при випробуваннях матеріалів і конструкцій не завжди можливо. Для знаходження оцінки довірчого інтервалу при невеликій кількості вимірювань (вибірки) використовують розподіл Стьюдента у вигляді коефіцієнту Стьюдента, що залежить від числа вимірювань *n* і ймовірності *P*

$$t_p = \frac{\Delta \cdot \sqrt{n}}{\sigma}. \qquad (5.8)$$

Коефіцієнт Стьюдента визначають за спеціальними таблицями в залежності від кількості дослідів і ймовірності попадання величини *a* в заданий інтервал.

Довірчий інтервал досліджуваної величини *x* при заданій імовірності можна записати виразом:

$$\bar{x} - t_p \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < x < \bar{x} + t_p \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad (5.9)$$

З формули (5.9) видно, що величини довірчих інтервалів збільшуються зі збільшенням довірчої ймовірності та зменшуються зі збільшенням кількості вимірювань.

Приклад 5.1

При вимірюваннях розмірів (висоти) стандартного куба для випробувань бетону отримано ряд результатів (X_i), см: 15,3; 15,0; 15,1; 15,2;15,2;15,4. Потрібно визначити довірчий інтервал вибірки при довірчій ймовірності P = 0,90.

Рішення.

Середнє арифметичне вибірки $\overline{X} = \frac{91{,}2}{6} = 15{,}2$ см.

Середньо квадратичне відхилення

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}1^2 + 2 \cdot 0{,}2^2}{6-1}} = 0{,}141 .$$

Коефіцієнт Стьюдента за таблицею А.1 $t_p = 2{,}02$.

Межа довірчого інтервалу $\Delta = \frac{t_p \cdot \sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}02 \cdot 0{,}141}{\sqrt{6}} = 0{,}12$ см.

Довірчий інтервал $\overline{X} \pm \Delta = 15{,}2 \pm 0{,}12$ см.

Це означає, що істинне значення розміру, що вимірюється, з ймовірністю 90 % знаходиться в межах 15,08…15,32 мм при заданій кількості вимірів.

5.3 Виключення грубих похибок при обробці результатів вимірювання

5.3.1 Критерій Шовіне

Якщо число одиничних вимірювань $n \le 10$ часто використовують критерій Шовіне. Результат утримує грубу похибку за умови (5.10).

$$\left|X_i - \overline{X}\right| > \begin{array}{l} 1{,}6\,\sigma_x \text{ при } n = 3; \\ 1{,}7\,\sigma_x \text{ при } n = 6; \\ 1{,}9\,\sigma_x \text{ при } n = 8; \\ 2{,}0\,\sigma_x \text{ при } n = 10. \end{array} \qquad (5.10)$$

Приклад 5.2

При вимірюванні діаметра стержня Ø 20 $^{(+0,33)}$ отримано наступні результати: 20,32; 20,18; 20,38 мм. Необхідно перевірити, утримував або ні останній результат грубу похибку.

Рішення:

Вибірка $n = 3$, тому застосуємо критерій Шовіне.

Середнє арифметичне вибірки

$$\overline{X} = \frac{20{,}32 + 20{,}18 + 20{,}38}{3} = 20{,}29 \text{ мм.}$$

Середньо квадратичне відхилення

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0{,}03^2 + 0{,}11^2 + 0{,}09^2}{3-1}} = 0{,}098\,.$$

$$\left|X_i - \overline{X}\right| = \left|20{,}18 - 20{,}29\right| = 0{,}11 < 1{,}6\sigma_x = 1{,}6 \cdot 0{,}098 = 0{,}158\,.$$

Результат не містить грубої похибки і деталі до вибракування можна відправляти тільки за вимогами класу точності виробу.

Приклад 5.3

За даними прикладу 5.1 перевірити з яких розмірів починаються промахи.

Рішення:

Вибірка $n = 6$, тому застосуємо критерій Шовіне.

Середнє арифметичне вибірки $\overline{X} = 15{,}2$ см.

Середньо квадратичне відхилення $\sigma_x = 0{,}141$.

$$\left|X_i - \overline{X}\right| = \left|15{,}4 - 15{,}2\right| = 0{,}2 < 1{,}7\sigma_x = 1{,}7 \cdot 0{,}141 = 0{,}24 \text{ см.}$$

Грубих результатів вибірка не має. У якості промахів можна враховувати розміри менші за 14,96 см і більші 15,44 см.

5.3.2 Критерій Романовського

Якщо число одиничних вимірювань $n \le 20 \ldots 25$, то на результати статистичної обробки значний вплив оказують грубі похибки (промахи). Для виключення промахів визначають критерій Романовського

$$\frac{\left|X_i - \overline{X}\right|}{\sigma_x} < t'\,, \qquad (5.11)$$

де t' – береться за таблицею А.2 в залежності від заданої довірчої імовірності.

Якщо нерівність не додержується, то такий результат (X_i) з вибірки відкидається.

Приклад 5.4

За даними прикладу 5.1 встановимо грубі похибки (промахи) за критерієм Романовського з довірчою імовірністю $P = 0{,}95$.

Коефіцієнт критерію Романовського при $n = 6$ за таблицею А.2 $t' = 2{,}78$.

Для $X_i = 15{,}4$ см – $\dfrac{\left|X_i - \overline{X}\right|}{\sigma_x} = \dfrac{\left|15{,}4 - 15{,}2\right|}{0{,}141} = 1{,}42 < t' = 2{,}78$.

Результат не грубий і його виключати з вибірки не треба.

5.3.3 Правило трьох сигм

Якщо число одиничних вимірювань $20 < n \le 50$, то можна застосувати критерій $3\sigma_x$. Сутність правила трьох сигм складається в тому, що якщо випадкові величини розподілені нормально, то абсолютні величини їх відхилення від математичного очікування не перевищують потроєного середнього квадратичного відхилення. Сумнівний результат повинен бути виключено з ряду одиничних вимірювань, якщо

$$\left|X_i - \overline{X}\right| > 3\sigma_x . \qquad (5.12)$$

6 ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ СТАТИСТИЧНОЇ ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАННЯ

Задача 6.1

Необхідно визначити гарантований клас бетону за результатами випробування на стиск 6 кубів.

Міцність кожного куба на стиск наведена в таблиці 6.1 – $X_i = f_{ci}$.

В табличній формі виконаємо розрахунки середнього арифметичного значення вибірки, відхилення від середнього арифметичного та квадрати значень відхилення.

Таблиця 6.1 – До статистичної обробці результатів випробування кубів

Номер куба	Міцність куба, МПа $X_i = f_{ci}$	Відхилення від середнього, МПа $X_i - \overline{X}$	$(X_i - \overline{X})^2$
1	25,4	- 1,83	3,35
2	26,2	- 1,07	1,14
3	27,7	0,43	0,18
4	28,0	0,73	0,53
5	28,1	0,83	0,69
6	28,2	0,93	0,86
	$\overline{X} = 27{,}27$	$\sum \approx 0$	$\sum = 6{,}75$

Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{6{,}75}{6-1}} = 1{,}16\,\text{МПа.}$$

Коефіцієнт варіації

$$\nu = \frac{\sigma_x}{\overline{X}} = \frac{1{,}16}{27{,}27} = 0{,}0425\,(4{,}25\ \%).$$

Для міцності будівельних матеріалів норми рекомендують приймати довірчу ймовірність $P = 0{,}95$, тобто при випробуваннях матеріалів або конструкцій встановлена похибка вимірювання не повинна перевищувати 5 % випадків.

При $P = 0{,}95$ – коефіцієнт Стьюдента за таблицею А.1 $t_P = 2{,}57$ і коефіцієнт критерію Романовського за таблицею А.2 $t' = 2{,}78$.

Максимальне відхилення від середнього у 1-го результату. Перевіримо його на грубість

$$\frac{\left|X_i - \overline{X}\right|}{\sigma_x} = \frac{\left|-1{,}83\right|}{1{,}16} = 1{,}58 < t' = 2{,}78.$$

Цей результат не є промахом і його виключати з результатів обробки не треба.

Похибка вимірювання

$$\Delta = \frac{t_P \cdot \sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}57 \cdot 1{,}16}{\sqrt{6}} = 1{,}22\ \text{МПа.}$$

Відносна похибка вимірювання

$$\delta = \frac{\Delta}{\overline{\overline{X}}} = \frac{1,22}{27,27} = 0,044\,(4,47\ \%) < 5\ \%.$$

Довірчий інтервал вибірки: при $P = 0,95$ – $\Delta = \pm 2\sigma_X$

$$(\overline{X} - 2\sigma_x) < X < \left(\overline{X} + 2\sigma_x\right),$$

$$27,27 - 2 \cdot 1,16 = 24,95 < X < 27,27 + 2 \cdot 1,16 = 29,59 \text{ МПа}.$$

За нижньою межею інтервалу бетон, якій випробувався, можна віднести до класу С20/25.

На практиці при обчисленні розрахункових характеристик матеріалів для будівельних конструкцій використовують *коректуючи коефіцієнти*, які враховують обсяг вибірки і гарантовану забезпеченість результатів випробування.

Для визначення ***характеристичного значення міцності бетону*** використовується формула

$$f_{ck} = \overline{f_c}(1 - \beta \cdot \nu) \tag{6.1}$$

де $\overline{f_c}$ – середнє арифметичне вибірки (за результатами випробування окремих зразків);

$\nu = \dfrac{\sigma_x}{\overline{\overline{f_c}}}$ – коефіцієнт варіації, який розраховується при статистичній обробці вибірки;

β – коректувальний коефіцієнт при забезпеченості (довірчої імовірності) $P = 0,95$ за таблицею 6.2.

Таблиця 6.2 – Коректувальний коефіцієнт до формули 6.1

Кількість зразків n, шт.	5	7	9	12	15	20	50	∞
β	3,34	2,8	2,58	2,39	2,28	2,16	1,94	1,64

Задача 6.2

За результатами задачі 6.1 визначимо клас бетону з використанням коректувального коефіцієнту вибірки.

При $P = 0,95$ і $n = 6$ (за таблицею 6.2) – $\beta = \dfrac{3,34 + 2,80}{2} = 3,07$.

Із задачі 6.1 – $\nu = 0,0432$, $\overline{f_c} = 23,27$ МПа.

Міцність бетону

$$f_{ck} = f_c(1-\beta\cdot\nu) = 27{,}27(1-3{,}07\cdot 0{,}0425) = 23{,}71\,\text{МПа}.$$

По вирахуваному характеристичному значенні міцності бетон можна віднести до класу С20/25.

Задача 6.3

При неруйнівних випробуваннях по визначенню міцності бетону за допомогою склерометра Шмідта отримані результати, що приведені в таблиці 6.3.

Таблиця 6.3 До статистичної обробці результатів випробування склерометром Шмідта

Номер результату	Показання приладу H	$\left(H_i-\overline{H}\right)$	$\left(H_i-\overline{H}\right)^2$
1	33	1,8	3,24
2	30	- 1,2	1,44
3	32	0,8	0,64
4	30	-1,2	1,44
5	29	- 2,2	4,84
6	26	- 5,2	27,04
7	38	6,8	46,24
8	40	8,8	77,44
9	25	- 6,2	38,44
10	29	- 2,2	4,84
	$\overline{H}=31{,}2$	$\sum=0$	$\sum=205{,}6$

Середнє квадратичне відхилення вибірки результатів випробувань

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{205{,}6}{10-1}} = 4{,}779\,.$$

Коефіцієнт варіації

$$\nu = \frac{\sigma_x}{\overline{H}} = \frac{4{,}7796}{31{,}2} = 0{,}1532\,(15{,}32\ \%).$$

Перевіримо інтервал грубих результатів за критерієм Шовіне. При $n=10$ $\left|H_i-\overline{H}\right| < 2\sigma_x = 2\cdot 4{,}779 = 9{,}6$, тобто грубих результатів у виборці немає.

На грубість можна перевірити результат № 8 за критерієм Романовського. При довірчої імовірності $P = 0,95$ і $n = 10$ за таблицею А.2 коефіцієнт $t' = 2,37$.

$$\frac{\left|H_i - \overline{H}\right|}{\sigma_x} = \frac{8,8}{4,7796} = 1,84 < t' = 2,37 .$$

Результат № 8 не грубий.

Міцність бетону за результатами неруйнівних випробувань візьмемо за графіком або тарувальним таблицям, що розроблені для склерометру. Наприклад: $\overline{f_c} = 0,85\overline{H} = 0,85 \cdot 31,2 = 26,52$ МПа.

Характеристичного значення кубикової міцності бетону

$$f_{ck} = f_c(1 - \beta \cdot \nu) = 26,52 \cdot (1 - 2,52 \cdot 0,1532) = 16,28 \text{ МПа},$$

де по інтерполяції коефіцієнт $\beta = 2,58 - \frac{2,58 - 2,39}{3} = 2,52$.

За результатами неруйнівних випробувань бетон можна віднести до класу С12/15.

Для підвищення точності вимірювань, якщо має місце випадкова похибка, потрібно збільшити вибірку (кількість ударів склерометром). Наприклад, при виборці $n = 25$ коректувальний коефіцієнт $\beta = 2,10$ і при середній міцності і коефіцієнті варіації як для попереднього розрахунку характеристичне значення кубикової міцності бетону

$f_{ck} = f_c(1 - \beta \cdot \nu) = 26,52 \cdot (1 - 2,10 \cdot 0,1532) = 17,98$ МПа, що може дозволити підвищити клас бетону до С16/20.

Межу текучості, або тимчасовий спротив сталі за результатами випробувань зразків вираховують за формулою

$$f_{yk} = \overline{f_y} \cdot (1 - \alpha_y \cdot \sigma_x), \tag{6.2}$$

де $\overline{f_y}$ – середнє арифметичне вибірки (за результатами випробування окремих зразків);

σ_x – середньо квадратичне відхилення вибірки;

α_y – коректувальний коефіцієнт при забезпеченості (довірчої імовірності) $P = 0,95$ (за таблицею 6.4).

Таблиця 6.4 – Коректувальний коефіцієнт до формули 6.2

Кількість зразків n, шт.	10	15	20	25	30	≥ 40
α_y	2,911	2,569	2,396	2,298	2,220	2,125

7 АПРОКСИМАЦІЯ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИМИ ЗАЛЕЖНОСТЯМИ. РІВНЯННЯ РЕГРЕСІЇ

Якщо з'єднати експериментальні точки на графіку відрізками прямих, то отримаємо ломану лінію, форма якої не відновиться при повторних вимірюваннях.

Відстань лінії від точки в кожну сторону по горизонталі і вертикалі вказує значення похибки відповідно по осі абсцис і ординат. Якщо середньоквадратичне відхилення отриманої функції від експериментальних точок буде мінімальним, то можна отримати рівняння для параметрів функції $y = \varphi(x)$. На цьому і засновано метод найменших квадратів.

Якщо в результаті експерименту отримаємо декілька значень функції y_i в заданих точках x_i, то можна апроксимувати її декотрою аналітичною функцією $\varphi(x)$ в яку входить *n*-кількість констант $a_к$.

Необхідною умовою найкращого середньоквадратичного наближення буде мінімізація суми середньоквадратичних відхилень

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - \varphi(x_i)]^2 \to 0 . \qquad (7.1)$$

Кореляційний зв'язок між двома величинами встановлюється коефіцієнтом кореляції (для апроксимації повинен бути не менше 0,5).

$$r_{xy} = \frac{1/n \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)\cdot\left(y_i - \bar{y}\right)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \quad |r_{xy}| \leq 1, \qquad (7.2)$$

Де середньоквадратичні відхилення по координатам

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}}, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2}{n-1}} . \qquad (7.3)$$

Задача 7.1 *Побудова градуйованої залежності за результатами випробувань.*

Побудувати градуйовану залежність для визначення міцності бетону молотком Кашкарова (за відбитком на поверхні).

Випробування виконувались на кубах проектного класу бетону С25/30 на 6-ти серіях контрольних зразків (по 3 куба). На кожному кубі виконувались не менше 5 відбитків. Потім кожна партія кубів випробувалась на пресі до руйнування з визначенням середньої міцності в серії.

Сукупність кубів дала міцність бетону в межах $f_{ci} = 27\ldots41$ МПа (див. таблицю 7.1).

Коефіцієнт кореляції при

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Z_i - \overline{Z}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{117{,}7\cdot 10^{-4}}{5}} = 4{,}85\cdot 10^{-2},$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(f_{ci} - \overline{f_c}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{138{,}84}{5}} = 5{,}27.$$

$$r_{xy} = \frac{1/n \sum_{i=1}^{n}\left(Z_i - \overline{Z}\right)\cdot\left(f_{ci} - \overline{f_c}\right)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{126{,}9\cdot 10^{-2}}{6\cdot 4{,}85\cdot 10^{-2}\cdot 5{,}27} = 0{,}827 > 0{,}5.$$

Рівняння регресії можна побудувати.

В першому наближенні у якості рівняння регресії використаємо гіперболу у вигляді

$$f_c = a_0 + \frac{a_1}{H}, \text{ або } f_c = a_0 + a_1\cdot Z, \text{ де } Z = 1/H.$$

Коефіцієнти в рівнянні (проміжні підрахунки проведені в таблиці 7.1)

$$a_1 = \frac{\sum_{1}^{n}\left(Z_i - \overline{Z}\right)\cdot\left(f_{ci} - \overline{f_c}\right)}{\sum_{1}^{n}\left(Z_i - \overline{Z}\right)^2} = \frac{126{,}9\cdot 10^{-2}}{117{,}7\cdot 10^{-4}} = 107{,}8,$$

$$a_0 = \overline{f_c} - a_1\cdot Z = 33{,}8 - 107{,}8\cdot 0{,}72 = -43{,}8.$$

Тоді градуйованої залежність $\underline{f_c = \frac{107{,}8}{H} - 43{,}8}$ (МПа).

Таблиця 7.1 – Розрахункові дані до побудови градуйованої залежності гіперболою

Номер серії	H_i	f_{ci}, МПа	$Z_i = \frac{1}{H_i}$	$f_{ci} - \overline{f}_c$	$(f_{ci} - \overline{f_c})^2$	$Z_i - \overline{Z}$ x 10^{-2}	$(Z_i - \overline{Z})^2$ x 10^{-4}	$(f_{ci} - \overline{f}_c) \cdot \left(Z_i - \overline{Z}\right)$ x 10^{-2}
1	1,50	27	0,658	– 6,8	46,24	– 6,2	38,4	42,2
2	1,48	29	0,676	– 4,8	23,04	– 4,4	19,4	21,1
3	1,38	34	0,725	– 0,2	0,04	0,5	0,25	– 0,1
4	1,40	34	0,714	– 0,2	0,04	– 0,6	0,36	0,1
5	1,30	38	0,767	4,2	17,46	4,7	22,1	19,7
6	1,28	41	0,781	7,2	51,24	6,1	37,2	43,9
	$\overline{H} = 1{,}39$	$\overline{f_c} = 33{,}8$	$\overline{Z} = 0{,}72$	$\sum = 0$	$\sum = 138{,}84$	$\sum = 0$	$\sum = 117{,}7$ x 10^{-4}	$\sum = 126{,}9$ x 10^{-2}

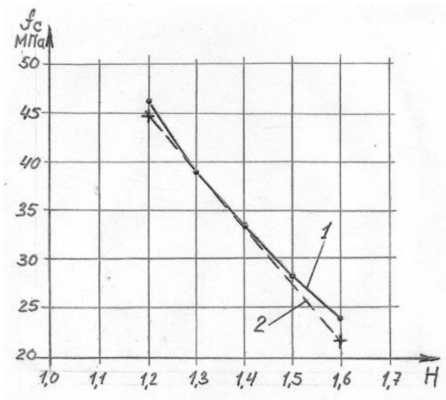


Рисунок 7.1 – Графіки рівнянь регресії до задачі 7.1:
1 – гіперболічна регресія; 2 – лінійна регресія

На графіку (рис. 7.1) отримана градуйованої залежність «1» в заданому інтервалі практично лінійна, тому доцільно використати більш просте лінійне рівняння типу $f_c = a_0 + a_1 \cdot H$.

За даними таблиці 7.1 виконаємо розрахунки коефіцієнтів лінійного рівняння в таблиці 7.2.

Таблиця 7.2 – Розрахункові дані до побудови лінійної градуйованої залежності

H_i	f_{ci}, МПа	$H_i - \overline{H}$	$f_{ci} - \overline{f}_c$	$(H_i - \overline{H})^2$ x 10^{-3}	$(H_i - \overline{H}) \cdot (f_{ci} - \overline{f_c})$
1,50	27	+ 0,11	– 6,8	12,1	– 0,748
1,48	29	+ 0,09	– 4,8	8,1	– 0,432
1,38	34	+ 0,01	– 0,2	0,1	– 0,002
1,40	34	– 0,01	– 0,2	0,1	0,002
1,30	38	– 0,09	4,2	8,1	– 0,378
1,28	41	– 0,11	7,2	12,1	– 0,792
$\overline{H} = 1,39$	$\overline{f_c} = 33,8$	$\sum = 0$	$\sum = 0$	$\sum = 40,6$ x 10^{-3}	$\sum = -2,35$

Коефіцієнти в рівнянні

$$a_1 = \frac{\sum_{1}^{n}\left(H_i - \overline{H}\right)\cdot\left(f_{ci} - \overline{f_c}\right)}{\sum_{1}^{n}\left(H_i - \overline{H}\right)^2} = \frac{-2{,}35}{40{,}6\cdot 10^{-3}} = -57{,}9\,,$$

$$a_0 = \overline{f_c} - a_1\cdot\overline{H} = 33{,}8 + 57{,}9\cdot 1{,}39 = 114{,}3\,.$$

Тоді градуйованої залежність $\underline{f_c = 114{,}3 - 57{,}9\cdot H}$ (МПа).

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Испытания сооружений : справ. пособие / [Ю. Д. Золотухин и др.]. – Минск : Вышейшая шк., 1992. – 272 с.
2. Тарасова В. В. Метрологія, стандартизація і сертифікація : підручник / В. В. Тарасова, А. С. Малиновський, М. Ф. Рибак. – Київ : Центр навч. літератури, 2006. – 264 с.
3. Топольник В. Г. Метрологія, стандартизація, сертифікація і управління якістю : навч. посібник / В. Г. Топольник, М. А. Котляр. – Донецьк : ДонДУЕТ, 2006. – 211 с.
4. Цюцюра С. В. Метрологія, основи вимірювань, стандартизація та сертифікація : навч. посібник / С. В. Цюцюра, В. Д. Цюцюра. – Київ : Знання, 2005. – 242 с.
5. Сєдишев Є. С. Конспект лекцій з дисципліни «Метрологія і стандартизація» для студентів 3–4 курсів денної і заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія / Є. С. Сєдишев ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 97 с

ДОДАТОК А

Таблиця А.1 – Значення коефіцієнта Стьюдента t_p залежно від числа вибірки n

n	Довірча імовірність P			n	Довірча імовірність P		
	0,9	0,95	0,99		0,9	0,95	0,99
2	6,31	12,71	63,70	18	1,74	2,11	2,90
3	2,92	4,30	9,92	19	1,73	2,10	2,88
4	2,35	3,18	5,84	20	1,72	2,09	2,86
5	2,13	2,78	4,60	25	1,71	2,06	2,80
6	2,02	2,57	4,03	30	1,70	2,05	2,76
7	1,94	2,45	3,71	35	1,69	2,03	2,73
8	1,89	2,37	3,50	40	1,68	2,02	2,71
9	1,86	2,31	3,36	45	1,68	2,02	2,69
10	1,83	2,26	3,25	50	1,68	2,01	2,67
11	1,81	2,23	3,17	60	1,67	2,00	2,66
12	1,79	2,20	3,11	70	1,67	1,99	2,65
13	1,78	2,18	3,06	80	1,66	1,99	2,64
14	1,77	2,16	3,01	90	1,66	1,99	2,63
15	1,76	2,15	2,98	10	1,66	1,98	2,63
16	1,75	2,13	2,95	120	1,66	1,98	2,62
17	1,74	2,12	2,92	∞	1,65	1,96	2,58

Таблиця А.2 – Значення коефіцієнта критерію Романовського t' залежно від числа вибірки n

n	Довірча імовірність P		n	Довірча імовірність P	
	0,95	0,99		0,95	0,99
2	15,56	77,96	10	2,37	3,41
3	4,97	11,46	12	2,29	3,23
4	3,56	6,53	14	2,24	3,12
5	3,04	5,04	16	2,20	3,04
6	2,78	4,36	18	2,17	3,00
7	2,62	3.96	20	2,15	2,93
8	2,51	3,71	30	2,08	2,80
9	2,43	3,54	∞	1,96	2,58

Виробниче-практичне видання

Методичні рекомендації
до проведення практичних занять
із навчальної дисципліни

«МЕТРОЛОГІЯ І СТАНДАРТИЗАЦІЯ»

*(для студентів 3–4 курсів денної і заочної форм навчання
освітнього рівня «бакалавр»
спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія)*

Укладач **СЄДИШЕВ** Євгеній Серафимович

Відповідальний за випуск *В. С. Шмуклер*

За авторською редакцією

Комп’ютерне верстання *Є. С. Сєдишев*

План 2018, поз. 3 М

Підп. до друку 21.02.2018. Формат 60 x 84/16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 2,1
Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.